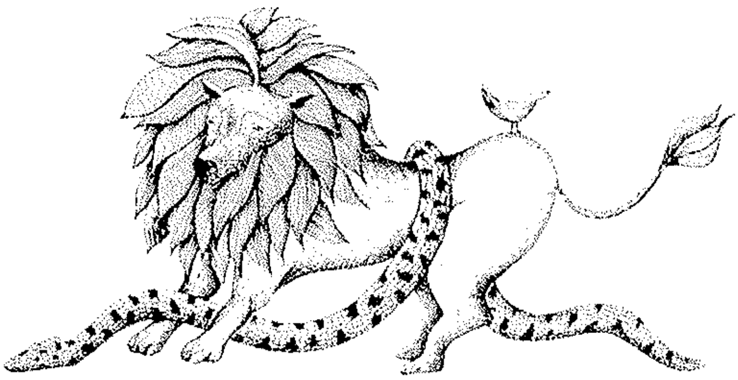


Questioni di tangenza con metodi (molto) elementari

Alessandro Foschi

Riassunto È convinzione abbastanza diffusa, come ci è capitato di costatare, che il coefficiente angolare di una retta tangente a una curva possa essere calcolato solo o con l'uso delle derivate, o, come nel caso delle coniche, attraverso l'annullamento del discriminante di un'opportuna equazione di secondo grado. Mostriamo allora come, con un metodo algebrico concettualmente molto semplice, si possono sia dimostrare alcuni particolari e classici risultati del calcolo differenziale, sia capire situazioni generali un po' più impegnative. Gli argomenti di questo intervento sono adatti già per una seconda o terza liceo scientifico, o per altri contesti scolastici dello stesso livello.

Abstract It is a fairly spread belief, as we have noted, that it is possible to find the slope of a tangent straight line to a curve only by computing the derivative of a function, or, as in the case of conics, by the vanishing of the discriminant of an opportune equation of degree two. So we point out how, by a conceptually very simple algebraic method, we can proof some classical results of the differential calculus and understand a little more demanding general situations. The arguments in this article are already suitable for the second or third year of a scientific high school, or for other school contexts at the same level.

Alessandro Foschi alessandro@foschi.biz

Liceo classico Convitto Nazionale "Vittorio Emanuele II" di Roma.

Gruppo di ricerca in didattica della Matematica, Università "La Sapienza" di Roma.

1. Introduzione

Chiacchierando con otto colleghi di diverse scuole superiori, uno per volta, e osservando l'operato delle matricole durante le nostre lezioni di matematica per i corsi di laurea in Farmacia, Chimica e tecnologia farmaceutiche, Ingegneria biomedica[1], abbiamo riscontrato quanto sia piuttosto diffusa la convinzione che il calcolo del coefficiente angolare di una retta tangente a una curva possa avvenire solo o con il calcolo di una derivata, o, come nel caso delle coniche, con l'annullamento del discriminante di un'equazione di secondo grado. In particolare, quasi tutti gli insegnanti con cui abbiamo parlato non sospettavano, al di là dei metodi sopra citati, che è possibile dimostrare per via molto, ma molto elementare la ben nota formula $m = 2ax_0 + b$ per il coefficiente angolare m di una retta tangente a una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, in un punto di coordinate (x_0, y_0). Dei docenti consultati, solo una collega ci ha indicato che in un recente libro di testo[2], per il caso delle coniche, aveva notato un metodo più "economico nei calcoli" rispetto all'annullamento del discriminante, ma che comunque lei preferisce insegnare i procedimenti classici di cui si è detto sopra. Sfogliando il libro segnalato, abbiamo costatato che il metodo ivi presente, nel capitolo sulle parabole in un paragrafo dal titolo "Formula di sdoppiamento", risulta meno consigliabile o difficilmente generalizzabile in diverse situazioni. Così abbiamo pensato a questo intervento da inserire nei programmi di una seconda o terza liceo scientifico, perché, come vedremo, è di fatto possibile svolgere numerosi problemi relativi alla tangenza fra rette e curve, o fra curve e curve, con gli strumenti di un primo biennio di liceo, fra cui anche problemi che nella pratica didattica del triennio iniziale di un liceo vengono evitati perché si pensa necessaria l'introduzione del calcolo differenziale. Per chi fosse interessato alle diverse possibilità di risolvere problemi di tangenza con metodi elementari, segnaliamo pure, oltre il testo citato in nota 2, due ulteriori articoli di Maria Greco Caliri[3] e di Fabrizio Masullo[4]. Il primo descrive una tecnica

---

[1] I primi due presso l'università "La Sapienza" e il terzo presso il Campus biomedico, entrambe università di Roma.

[2] Bergamini M., Trifone A., Barozzi G., 2009, *Corso base blu di matematica*, moduli SLN in volume unico 3, Zanichelli, pp. 179 e segg.

[3] Greco Caliri M., 1973, Equazione della tangente a una curva, *Archimede*, anno XXV, Settembre – Dicembre, 5 – 6, anno LXX di *Il Bollettino di matematica*, pp. 301 – 303.

[4] Masullo F., 2009, Proprietà ottiche e derivate della parabola e dell'ellisse, *Progetto Alice*, II vol. X, pp. 303 – 310.

elementare vicina a quella che qui offriamo ma che necessita dell'algoritmo della divisione tra polinomi, algoritmo non molto amato dagli studenti e talvolta tralasciato pure dagli insegnanti; il secondo, limitato ai casi di parabole ed ellissi, prende le mosse dalle interessanti proprietà ottiche di queste coniche, ma poi ha bisogno di richiamare alcune nozioni, però non difficili, di trigonometria. Visto che il primo articolo è piuttosto datato e forse di difficile reperibilità, ne riportiamo a grandi linee il metodo nell'ultima sezione.

Oltre a rappresentare una feconda opportunità didattica per introdurre un tema matematico importante in termini elementari, per far pensare gli studenti, farli calcolare in maniera ragionata, proporre loro attività di sperimentazione, spingerli a formulare ipotesi e talvolta a dimostrarle, l'argomento qui esposto si rivela utile per trattare in modo molto semplice l'analisi per via geometrica della natura delle radici di un'equazione di terzo grado. Offriamo tale studio per un paragone con il punto di vista diverso nell'articolo recente di Massimo Genchi su *Progetto Alice*[5].

Non consigliamo di aggiungere le idee sviluppate in questo articolo ai correnti programmi di geometria analitica; piuttosto suggeriamo di sostituirle a quei molteplici esercizi, presenti in tutti i testi scolastici, che prendono a pretesto le coniche o le equazioni di luoghi geometrici e poi sfociano in vuote esercitazioni di mero calcolo.

2. Questioni di tangenza

2.1 Una prima attività di ricerca per gli studenti

Col metodo semplice che vedremo, per avviare l'attività degli studenti, l'insegnante dimostri in classe le ben note formule $m = 2x_0$, senza alcun bisogno di derivare, e $q = -x_0^2$, relative al coefficiente angolare m e all'intercetta q di una retta di equazione $y = mx + q$, tangente in un punto di coordinate (x_0, y_0) al grafico di una parabola con equazione iniziale $y = x^2$.

La spiegazione può procedere come segue: la coppia di coordinate (x_0, y_0) deve essere soluzione del sistema composto dall'equazione della retta e dall'equazione della parabola. Tale sistema è risolto non appena si conoscono le soluzioni dell'equazione $x^2 - mx - q = 0$. La condizione di

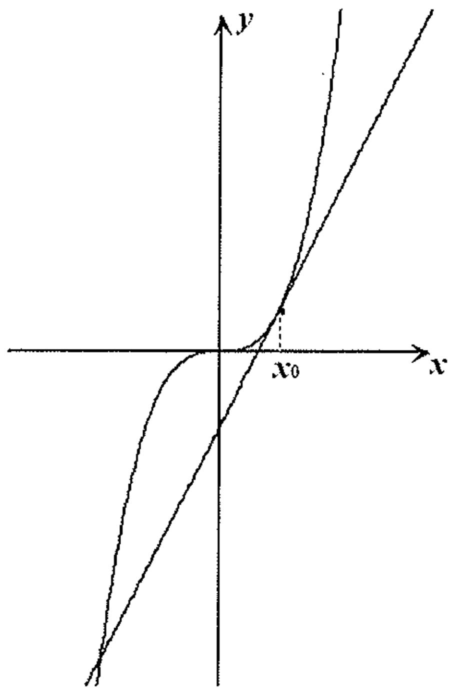
[5] Genchi M., 2010, Risoluzione qualitativa dell'equazione di terzo grado, *Progetto Alice*, I vol. XI, n. 31, pp. 131 – 152.

tangenza è equivalente al fatto che il polinomio di secondo grado a primo membro abbia x_0 come radice doppia: $x^2 - mx - q = (x - x_0)^2 = 0$. Sviluppando il quadrato nel secondo membro e uguagliando i coefficienti dei monomi con lo stesso grado, si ottengono appunto le formule: $m = 2x_0$ e $q = -x_0^2$.

Da questo primo esempio, come test di autoverifica, si può chiedere agli studenti di ripetere il ragionamento con l'equazione $y = ax^2$. Il sistema suddetto fornisce l'equazione $ax^2 - mx - q = 0$ e, ragionando come prima, otteniamo: $ax^2 - mx - q = a(x - x_0)^2 = 0$. Lo sviluppo del quadrato nel secondo membro e l'uguaglianza tra i coefficienti dei due polinomi, fornisce loro le soluzioni $m = 2ax_0$ e $q = - ax_0^2$.

A questo punto gli studenti dovrebbero essere pronti per passare al caso di parabole con equazione $y = ax^2 + bx + c$, ma prima vale la pena di insistere sugli esempi con i monomi x^n e ax^n.

Siano dunque $y = x^3$ e $y = mx + q$, rispettivamente, le equazioni di una cubica e di una retta che supponiamo tangente alla cubica in un punto di coordinate (x_0, y_0). Il sistema composto dalle due equazioni porta all'unica equazione $x^3 - mx - q = 0$, che deve avere tre radici reali, x_1, x_2 e x_3, di cui almeno due coincidenti $x_2 = x_3 = x_0$, pari, appunto, all'ascissa del punto di tangenza.



Pertanto: $x^3 - mx - q = (x - x_0)^2 (x - x_1) = 0$. Sviluppando il secondo membro si ha: $x^3 - mx - q = x^3 - (2x_0 + x_1) x^2 + (x_0^2 + 2 x_0x_1)x - x_0^2x_1 = 0$. L'uguaglianza dei coefficienti si traduce in:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_0 \\ -m = x_0^2 + 2x_0x_1 \\ -q = -x_0^2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_0 \\ -m = x_0^2 - 4x_0^2 \\ q = -2x_0^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_0 \\ m = 3x_0^2 \\ q = -2x_0^3 \end{cases}.$$

Osserviamo che il sistema ci fornisce sia i coefficienti della retta che l'ascissa dell'ulteriore punto di intersezione tra la retta e la cubica.

Ripetendo, per esercizio, con la cubica di equazione $y = ax^3$, gli studenti possono arrivare facilmente al risultato che più interessa:

$$\begin{cases} m = 3ax_0^2 \\ q = -2ax_0^3 \end{cases}.$$

Una volta analizzati questi due esempi si può provare a far congetturare agli studenti cosa accade se prendiamo le curve definite dalle due equazioni $y = x^4$ e $y = ax^4$. I calcoli sono un po' lunghi, un po' noiosi, ma non impossibili da analizzare in classe, e per una volta vale la pena di affrontare tale sforzo. Qui ne facciamo il sunto, indicando con x_0, x_0, x_1, x_2, le quattro radici dell'equazione (x_0 è doppia per la condizione di tangenza) e ponendo, in tutta generalità, $x_1 = \alpha + \beta i$ e $x_2 = \alpha - \beta i$, avendo indicato con α e β due qualsiasi numeri reali e con i l'unità immaginaria[6]:

$$x^4 - mx - q = (x - x_0)^2 (x - x_1) (x - x_2) = (x - x_0)^2 (x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) =$$

$$= x^4 - 2(x_0 + \alpha) x^3 + (x_0^2 + 4 x_0\alpha + \alpha^2 + \beta^2) x^2 - 2x_0(x_0\alpha + \alpha^2 + \beta^2) x +$$

$$+ x_0^2(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Il confronto tra i coefficienti del primo e del quarto membro ci fornisce:

---

[6] Se non sono stati introdotti i numeri complessi, si può fattorizzare in questo modo: $x^4 - mx - q = (x - x_0)^2 (x^2 + bx + c)$; poi si procede in maniera analoga.

$$\begin{cases} x_0 + \alpha = 0 \\ x_0^2 + 4x_0\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \\ m = 2x_0\left(x_0\alpha + \alpha^2 + \beta^2\right) \\ q = -x_0^2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -x_0 \\ \beta^2 = 2x_0^2 \\ m = 4x_0^3 \\ q = -3x_0^4 \end{cases}.$$

e si deduce pure che la retta tangente non ha, nel piano cartesiano, ulteriori intersezioni con la curva oltre il punto di tangenza.

A questo punto è utile indurre gli studenti a costruire tabelle che aiutino a visualizzare le regolarità che la situazione presenta e a ipotizzare cosa può accadere nel caso generale (solite notazioni: $y = mx + q$, per l'equazione della retta; $y = x^n$ e $y = ax^n$ per le equazioni delle curve considerate):

x^n	m	q
x	$1 = 1x_0^0$	0
x^2	$2x_0$	$-1x_0^2$
x^3	$3x_0^2$	$-2x_0^3$
x^4	$4x_0^3$	$-3x_0^4$
...	...	...
x^n	nx_0^{n-1}	$-(n-1)\,x_0^n$

ax^n	m	q
ax	$a = 1ax_0^0$	0
ax^2	$2ax_0$	$-1ax_0^2$
ax^3	$3ax_0^2$	$-2ax_0^3$
ax^4	$4ax_0^3$	$-3ax_0^4$
...	...	...
ax^n	nax_0^{n-1}	$-(n-1)\,a\,x_0^n$

In generale, l'equazione della retta tangente a un curva $y = ax^n$, nel punto di coordinate (x_0, y_0), è:

$$y = nax_0^{n-1}\,x - (n-1)\,a\,x_0^n \qquad \text{oppure} \qquad y = nax_0^{n-1}\,x + (1-n)\,a\,x_0^n\,.$$

Per una questione mnemonica, è interessante osservare lo scambio di ruolo esponente ↔ coefficiente dei numeri n ed $n - 1$ (con un cambio di segno).

Non ci sembra il caso, a questo livello, di andare al di là delle precedenti osservazioni e delle considerazioni intuitive che gli studenti possono proporre per completare le tabelle sopra riportate, purché si sia reso chiaro che tale risultato può essere considerato solo una congettura. La dimostrazione generale può essere rinviata all'introduzione del calcolo differenziale.

2.2 E la ricerca continua... funzioni razionali intere

Un ulteriore passo consiste nell'analisi teorica della situazione in cui si considerano una retta e una parabola, di rispettive equazioni $y = mx + q$ e $y = ax^2 + bx + c$. Come prima, supponiamo che la retta sia tangente alla parabola in un punto di coordinate (x_0, y_0). La coppia di coordinate deve allora essere soluzione del sistema tra l'equazione della retta e l'equazione della parabola, sistema equivalente all'equazione $ax^2 + (b - m)\,x + c - q = 0$. La condizione di tangenza implica: $ax^2 + (b - m)\,x + c - q = a(x - x_0)^2$. Dallo sviluppo del quadrato a secondo membro e l'uguaglianza dei coefficienti dei termini dello stesso grado si ottengono le condizioni:

$$m = 2ax_0 + b \qquad \text{e} \qquad q = c - ax_0^2.$$

Cosicché l'equazione generale della retta tangente alla parabola in un punto di coordinate (x_0, y_0) è:

$$y = (2ax_0 + b)x + c - ax_0^2.$$

Lo stesso procedimento, in teoria, può essere utilizzato per calcolare il coefficiente angolare di una retta tangente a una curva definita da un qualsiasi polinomio, ovvero nel caso di funzioni razionali intere. Come vedremo, se è semplice capire l'idea teorica, per il calcolo di una formula, invece, già dall'equazione di una cubica i calcoli necessari si appesantiscono. Però possiamo chiamare in aiuto un computer su cui sia installato, per esempio, il software *Derive*. Vediamo esplicitamente, "a mano", i calcoli nel caso di una cubica: un esempio tutto sommato fattibile. Siano quindi date le equazioni $y = mx + q$ e $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, rispettivamente di una retta e di una cubica. Vogliamo calcolare il coefficiente angolare m e l'intercetta q, se la retta è tangente nel punto (x_0, y_0) alla cubica data. Dal sistema

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d \end{cases}$$

si ricava l'equazione $ax^3 + bx^2 + (c - m)x + d - q = 0$. La tangenza nel punto $(x_0\ ,\ y_0)$ si traduce sempre nel fatto che il polinomio a primo membro ha x_0 come radice doppia: $ax^3 + bx^2 + (c - m)x + d - q = a(x - x_0)^2(x - x_1) = 0$. Sviluppiamo il prodotto $a(x - x_0)^2(x - x_1)$ e uguagliamo i due polinomi:

$$ax^3 + bx^2 + (c - m)x + d - q = ax^3 - a(2x_0 + x_1)\, x^2 + a(x_0^2 + 2\, x_0\, x_1)x - x_0^2\, x_1.$$

Dall'uguaglianza dei coefficienti si ottiene: $\begin{cases} b = -a(2x_0 + x_1) \\ c - m = a\left(x_0^2 + 2x_0x_1\right), \\ d - q = -x_0^2 x_1 \end{cases}$

da cui ne deduciamo: $\begin{cases} x_1 = -2ax_0 - b \\ c - m = -x_0(3ax_0 + 2b) \;\Rightarrow\; m = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c\,. \\ q = d - 2ax_0^3 - bx_0^2 \end{cases}$

A questo punto ci si può porre la seguente domanda: possiamo, da un confronto di questi casi, trarre una qualche regola generale per calcolare la retta tangente a una funzione razionale intera $y = P(x)$? Come sempre una tabella può aiutarci:

Polinomio P(x)	***Coefficienti retta tangente***	
	m	q
$a_1\, x + a_0$	$a_1 = 1a_1 \cdot x_0^0$	a_0
$a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$	$2a_2\, x_0 + a_1$	$a_0 - 1a_2\, x_0^2$
$a_3\, x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$	$3\, a_3 x_0^2 + 2a_2 x_0 + a_1$	$a_0 - 2a_3\, x_0^3 - 1a_2\, x_0^2$
...	...	...
$a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_0$	?	?

Gli studenti possono supporre che i coefficienti dell'equazione generale della retta tangente alla curva di equazione $y = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_0$, in un punto di coordinate (x_0, y_0), sono:

$$m = na_n x_0^{\,n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, x_0^{\,n-2} + (n-2)\, a_{n-2}\, x_0^{\,n-3} + \ldots + a_1$$

$$q = a_0 - (n-1)\, a_n\, x_0^{\,n} - (n-2)\, a_{n-1}\, x_0^{\,n-1} - (n-3)\, a_{n-2}\, x_0^{\,n-2} - \ldots - 1 a_2\, x_0^{2}$$

Il procedimento illustrato ha quindi il merito di condurre a ipotizzare formule che permettono il calcolo diretto dell'equazione della retta tangente, in un punto (x_0, y_0), al grafico di una funzione razionale intera, utilizzando solo nozioni di algebra a livello delle prime classi del liceo. Si tratta di un'attività che si può premettere quale primo passo verso quanto verrà poi affrontato in generale e in modo più rigoroso al quinto anno con l'uso delle derivate. E, anzi, proprio il fatto che per il calcolo di m si sia proceduto con un metodo in parte empirico, con osservazioni e analogie su casi singoli e facilmente gestibili da un punto di vista computazionale, che tramite una dimostrazione rigorosa in tutti i dettagli (il metodo è difficilmente generalizzabile in un discorso per polinomi qualsiasi e di qualunque grado), può essere un pretesto valido per introdurre, quando sarà il momento, il calcolo differenziale.

Come vedremo in aggiunta, tale metodo può essere sfruttato anche per svariate funzioni che non siano razionali intere e per ulteriori suggerimenti didattici di interesse. Vediamo intanto un altro esempio per funzioni polinomiali in cui il metodo si rivela efficace in situazioni che di solito vengono escluse dagli studi delle prime classi di liceo e che ora possono invece farne parte.

Esempio 2.2.1 *Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per il punto $A(0, 2)$ e tangente nel punto $B(1, 0)$ alla curva di equazione $y = x^4 + 3x^2 - 5x + 1$.*

Sol. I punti A e B appartengono alla parabola, pertanto la sua equazione in generale è: $y = ax^2 - (a + 2)x + 2$. Nel punto B le curve devono avere la stessa retta tangente di equazione $y = mx + q$. Per la tangenza alla parabola e all'altra curva, e la formula sopra riportata, si ottengono rispettivamente le condizioni: $m = a - 2$ ed $m = 5$. Si deduce quindi che $a = 7$. La parabola, allora, ha equazione $y = 7x^2 - 9x + 2$.

In alternativa, anche se questo modo di procedere implica più calcoli, dal sistema:

$$\begin{cases} y = x^4 + 3x^2 - 5x + 1 \\ y = ax^2 - (a+2)x + 2 \end{cases}$$

si ottiene l'equazione $x^4 + (3 - a)x^2 + (a - 3)x - 1 = 0$. Conviene dividere il polinomio a primo membro per $x - 1$ e considerare il quoziente:

$$x^3 + x^2 + (4 - a)x + 1 = 0.$$

Poiché $x = 1$ deve essere ancora radice, basta sostituire 1 nell'equazione per ottenere $a = 7$.

2.3 Fin dove possiamo spingerci?

Sviluppiamo in questa sezione alcuni esempi di applicazione del metodo sopra descritto con funzioni razionali fratte, funzioni irrazionali, specifiche funzioni trascendenti e curve definite da equazioni sotto forma implicita. In particolare, chiuderemo questa sezione sviluppando il calcolo teorico, abbastanza impegnativo, delle rette tangenti a un'ellisse in due suoi punti di uguale ascissa data (esempio 2.2.8), per aprire al lettore un confronto con il metodo diverso approfondito in: Masullo F., 2009, Proprietà ottiche e derivate della parabola e dell'ellisse, *Progetto Alice*, II vol. X, pp. 303 – 310. Alcuni degli esempi sono mirati a dimostrare formule la cui conoscenza può poi semplificare la risoluzione di svariati problemi collegati.

Esempio 2.3.1 *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della curva di equazione* $y = \frac{1}{x}$ *in un suo punto di ascissa* x_0.

Sol. Dal sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y = mx + q \end{cases}$$

si arriva all'equazione: $mx^2 + qx - 1 = 0$. Per la condizione di tangenza possiamo scrivere: $mx^2 + qx - 1 = m(x - x_0)^2 = mx^2 - 2mx_0x + mx_0^2$, e quindi ricavare $q = -2mx_0$ ed $mx_0^2 = -1$. Si ottiene così la ben nota formula $m = -\frac{1}{x_0^2}$, e inoltre $q = \frac{2}{x_0}$. La retta tangente ha equazione: $y = -\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}$.

Esempio 2.3.2 *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della curva di equazione* $y = \dfrac{2x-1}{3x+2}$ *nel suo punto di ascissa* $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Sol. La curva data passa per il punto di coordinate $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$. Anche la retta tangente passa per questo punto, quindi la sua equazione $y = mx + q$ diviene: $y = mx - \dfrac{m}{2}$. Dal sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{3x+2} \\ y = mx - \dfrac{m}{2} \end{cases}$$

si ottiene la condizione $6mx^2 + (m-4)x - 2(m-1) = 0$. Per la condizione di tangenza si deve avere: $6mx^2 + (m-4)x - 2(m-1) = 6m\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$. Ovvero: $6mx^2 + (m-4)x - 2(m-1) = 6mx^2 - 6mx + \dfrac{3}{2}m$. Questo vuol dire che:

$$\begin{cases} m - 4 = -6m \\ -2(m-1) = \dfrac{3}{2}m \end{cases} \Rightarrow \quad m = \frac{4}{7} \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{2}{7} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{7}x - \frac{2}{7}.$$

Esempio 2.3.3 *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della curva di equazione* $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x-1}$ *nel punto di ascissa* $x_0 = 0$.

Sol. L'equazione della retta tangente è del tipo: $y = mx - 1$. Dal sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x-1} \\ y = mx - 1 \end{cases}$$

si ha l'equazione $2x^3 + (3 - m)x^2 + (m + 1)x = 0$ che, considerata la condizione di tangenza, deve avere tre soluzioni: $x_0 = 0$ (doppia) e x_1

(l'ulteriore ascissa di intersezione); ovvero:

$$2x^3 + (3 - m)x^2 + (m + 1)x = 2x^2(x - x_1) = 2x^3 - 2x_1x^2.$$

Dal confronto dei coefficienti del primo e del terzo membro si ottiene:

$$\begin{cases} 3 - m = -2x_1 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ m = -1 \end{cases}$$

e quindi la retta richiesta ha equazione $y = -x - 1$ e interseca la curva in un altro punto di ascissa -2.

Esempio 2.3.3 *Trovare i punti in cui la tangente al grafico della curva di equazione* $y = \dfrac{x+2}{x}$ *ha il coefficiente angolare* -2.

Sol. Dal sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+2}{x} \\ y = -2x + q \end{cases}$$

si ottiene l'equazione $2x^2 + (1 - q)x + 2 = 0$. La condizione di tangenza implica: $2x^2 + (1 - q)x + 2 = 2(x - x_0)^2 = 2x^2 - 4x_0x + 2x_0^2$; ovvero:

$$\begin{cases} 1 - q = -4x_0 \\ 2x_0^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 5 \vee q = -3 \\ x_0 = \pm 1 \end{cases}$$

Esempio 2.3.4 *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della curva di equazione* $y = \sqrt{x}$ *in un suo punto di ascissa* x_0.

Sol. Dal solito sistema si ricava l'equazione $\sqrt{x} = mx + q$; quindi si passa, sotto opportune condizioni, all'equazione $x = m^2x^2 + 2mqx + q^2$, e poi a $m^2x^2 + (2mq - 1)x + q^2 = 0$. Per la tangenza: $m^2x^2 + (2mq - 1)x + q^2 = m^2x^2 + - 2m^2x_0x + m^2x_0^2$; cosicché risulta: $m^2x_0^2 = q^2$ e $2mq - 1 = - 2m^2x_0$. Per le condizioni del problema, $q = mx_0$ e, sostituendo: $2m^2x_0 - 1 = - 2m^2x_0$. Finalmente si arriva a $4m^2x_0 - 1 = 0$, cioè a: $m = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$. La retta ha equazione:

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{2}\sqrt{x_0}\,.$$

Esempio 2.3.5 *Determinare la curva di equazione* $y = e^x + ax^3 + bx$ *tangente alla curva di equazione* $y = e^x - x^2 + 3x - 2$ *nel punto di coordinate* $(1, e)$.
Sol. La condizione di passaggio nel punto $(1, e)$ per la prima curva si traduce in $b = -a$, portando al sistema:

$$\begin{cases} y = e^x + ax^3 - ax \\ y = e^x - x^2 + 3x - 2 \end{cases}.$$

Risolvendo, si arriva all'equazione $ax^3 + x^2 + (-a-3)x + 2 = 0$. Il polinomio a primo membro deve essere divisibile per $(x-1)^2$, quindi:

$$ax^3 + x^2 + (-a-3)x + 2 = a(x-1)^2(x-x_1)$$

$$ax^3 + x^2 + (-a-3)x + 2 = ax^3 - a(x_1+2)x^2 + a(2x_1+1)x - ax_1\,.$$

Uguagliando i coefficienti, si ottiene e si risolve il sistema:

$$\begin{cases} -a(x_1+2) = 1 \\ a(2x_1+1) = -a-3 \\ -ax_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a(x_1+2) = 1 \\ -ax_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-2a = 1 \\ -ax_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ x_1 = -4 \end{cases}.$$

Pertanto l'equazione della prima curva è $y = e^x + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{2}$, che interseca la seconda curva nell'ulteriore punto $(-4, e^{-4} - 30)$.

Altrimenti si può osservare che il polinomio $ax^3 + x^2 + (-a-3)x + 2$ si annulla per $x = 1$. Dividendolo per il binomio $x - 1$, si ottiene il polinomio quoziente $ax^2 + (a+1)x - 2$, che, per la condizione di tangenza deve ancora annullarsi per $x = 1$; ovvero si deve verificare: $a + a + 1 - 2 = 0$, cioè $a = \frac{1}{2}$. (O ancora si potrebbe scrivere $ax^2 + (a+1)x - 2 = a(x-x_1)(x-1)$, poi uguagliare i coefficienti dei monomi con lo stesso grado, ecc.).

Esempio 2.3.6 *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della curva di equazione* $x^2y - xy + 1 = 0$ *nel suo punto di ascissa* $x_0 = 2$.

Sol. La curva data passa per il punto di coordinate $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$. Anche la retta tangente passa per questo punto, quindi la sua equazione $y = mx + q$ diviene: $y = mx - 2m - \frac{1}{2}$. Dal sistema:

$$\begin{cases} x^2y - xy + 1 = 0 \\ y = mx - 2m - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

si passa all'equazione $2mx^3 - (6m + 1)x^2 + (4m + 1)x + 2 = 0$ che, per la condizione di tangenza, deve avere tre soluzioni: $x_0 = 2$ (doppia) e x_1 (l'ulteriore ascissa di intersezione). Quanto appena detto si traduce nell'uguaglianza: $2mx^3 - (6m + 1)x^2 + (4m + 1)x + 2 = 2m(x - 2)^2(x - x_1)$. Del resto: $2m(x - 2)^2(x - x_1) = 2mx^3 - 2m(x_1 + 4)x^2 + 8m(x_1 + 1)x - 8x_1m$. Il confronto con i coefficienti del primo polinomio fornisce:

$$\begin{cases} 2m(x_1 + 4) = 6m + 1 \\ 8m(x_1 + 1) = 4m + 1 \\ -8x_1m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{3}{4} \\ x_1 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

La retta cercata ha equazione $y = \frac{3}{4}x - 2$ e interseca la curva in un altro punto di ascissa $-\frac{1}{3}$.

Esempio 2.3.7 *Scrivere le equazioni della retta tangente e della normale alla curva di equazione* $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ *nel punto di ordinata* 3.

Sol. Il punto di tangenza ha coordinate $(-1, 3)$. L'equazione della retta è del tipo $y = mx + m + 3$. Dal sistema tra le equazioni della curva e della retta si ottiene: $x^3 + m^2x^2 + 2(m^2 + 3m + 1)x + m^2 + 6m + 3 = 0$. Il polinomio a primo membro si deve fattorizzare nel prodotto $(x + 1)^2(x - x_1)$, che sviluppato è uguale a $x^3 + (2 - x_1)x^2 + (1 - 2x_1)x - x_1$. Pertanto si arriva al sistema:

$$\begin{cases} m^2 = 2 - x_1 \\ 2\left(m^2 + 3m + 1\right) = 1 - 2x_1 \\ m^2 + 6m + 3 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{5}{6} \\ x_1 = \dfrac{47}{36} \end{cases}.$$

La retta tangente ha equazione $y = -\frac{5}{6}x + \frac{13}{6}$ e interseca la curva in un altro punto di ascissa $x_1 = \frac{47}{36}$; la retta normale ha equazione $y = \frac{6}{5}x + \frac{21}{5}$.

Esempio 2.3.8 Tangenti a un'ellisse[7]. *Determinare la retta tangente a un'ellisse di equazione* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *nei suoi due punti di ascissa* x_0.

Sol. Dal sistema:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

si arriva all'equazione: $(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mqx + a^2(q^2 - b^2) = 0$. Per la tangenza: $(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mqx + a^2(q^2 - b^2) = (a^2m^2 + b^2)(x - x_0)^2$; ovvero:

$$\begin{cases} 2a^2mq = -2x_0\left(a^2m^2 + b^2\right) \\ a^2\left(q^2 - b^2\right) = x_0^2\left(a^2m^2 + b^2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm\dfrac{bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}} \\ q = \mp\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \end{cases}$$

Le equazioni delle rette tangenti sono dunque:

$$y = \frac{bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}}x - \frac{ab}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}}x + \frac{ab}{\sqrt{a^2 - x_0^2}},$$

---

[7] Per approfondimenti e per un metodo diverso da quello qui esposto, il lettore può utilmente consultare: Masullo F., 2009, Proprietà ottiche e derivate della parabola e dell'ellisse, *Progetto Alice*, II vol. X, pp. 303 – 310.

che possono essere riscritte come:

$$\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2-x_0^2}}x-y=\frac{ab}{\sqrt{a^2-x_0^2}} \quad \text{e} \quad \frac{bx_0}{a\sqrt{a^2-x_0^2}}x+y=\frac{ab}{\sqrt{a^2-x_0^2}}.$$

Dividendo per il termine noto e considerando che $y_0=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}$, otteniamo infine la cosiddetta *formula di sdoppiamento* per l'ellisse, molto comoda per scrivere in modo semplice e diretto le equazioni delle rette richieste:

$$\frac{x_0x}{a^2}\pm\frac{y_0y}{b^2}=1$$

3. Sulla natura delle soluzioni delle equazioni di terzo grado

Il metodo sopra illustrato offre uno strumento elementare per capire la natura delle radici di un'equazione algebrica di terzo grado per via geometrica[8]. Questo argomento può essere oggetto di una proficua attività di *Problem Solving* (magari fornendo qualche indicazione agli studenti) o di un'esercitazione condotta dal docente e partecipata dalla classe. Qui ci limiteremo alle equazioni cubiche della forma particolare $x^3+px+q=0$, lasciando al lettore i dettagli nel caso dell'equazione cubica generale[9].

Le soluzioni dell'equazione possono essere viste come soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y=x^3 \\ y=-px-q \end{cases}$$

Una prima domanda: quando la retta di equazione $y=-px-q$, che passa per il punto di coordinate $(0,-q)$, è tangente alla curva $y=x^3$? Secondo

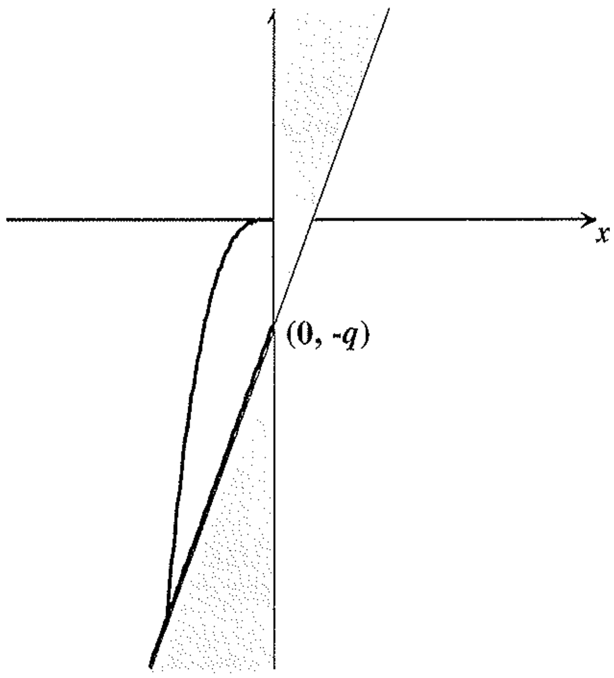
[8] Sulla base delle indicazioni qui fornite, si potrebbe chiedere agli studenti di adattare il metodo anche alle equazioni di secondo grado, ritrovando per via geometrica le ben note condizioni algebriche che determinano la natura delle soluzioni.

[9] Per approfondimenti e per un metodo diverso da quello qui esposto, il lettore può utilmente consultare: Genchi M., 2010, Risoluzione qualitativa dell'equazione di terzo grado, *Progetto Alice*, I vol. XI, n. 31, pp. 131 – 152.

quanto sviluppato in precedenza, indicando con (x_0, y_0) il punto di tangenza, deve accadere:

$$\begin{cases} p = -3x_0^2 \\ q = 2x_0^3 \end{cases}.$$

Possiamo osservare che: $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -x_0^6 + x_0^6 = 0$. La retta tangente, quindi, ha equazione $y = 3 \cdot \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{2}{3}} x - q$. Una volta individuata la retta tangente, possiamo dividere il piano cartesiano in due zone, così come illustrato in figura: una chiara e una d'ombra (tra la retta tangente e l'asse y delle ordinate).



La figura ci suggerisce di confrontare le direzioni delle rette in gioco $y = -px - q$ e $y = 3\cdot\left(\frac{q}{2}\right)^{2/3} x - q$, rispettivamente determinate dai coefficienti angolari $-p$ e $3\cdot\left(\frac{q}{2}\right)^{2/3}$. Assieme alla considerazione del segno di q, troviamo quindi un criterio completo per riconoscere la natura delle radici dell'equazione cubica in esame, che poi possiamo caratterizzare tramite condizioni algebriche.

Sia che q risulti maggiore o minore di zero, una radice dell'equazione $x^3 + px + q = 0$ sarà sempre reale mentre le altre due risulteranno:

- reali e distinte, se e solo se la retta di equazione $y = -px - q$ è interna alla zona d'ombra ($-p > 3\cdot\left(\frac{q}{2}\right)^{2/3}$);
- reali e coincidenti, se e solo se la retta di equazione $y = -px - q$ coincide con la tangente ($-p = 3\cdot\left(\frac{q}{2}\right)^{2/3}$);
- complesse e coniugate, se e solo se la retta di equazione $y = -px - q$ giace al di fuori della zona d'ombra ($-p < 3\cdot\left(\frac{q}{2}\right)^{2/3}$).

Da un confronto sui grafici e sui coefficienti angolari possiamo dunque ricavare che, in termini algebrici, oltre una radice reale ci saranno due radici

- reali e distinte, se e solo se $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$;
- reali e coincidenti, se e solo se $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$;
- complesse e coniugate, se e solo se $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0$.

Il segno di q, infine, determina il segno delle radici reali.

4. Richiami su un altro metodo elementare

In un articolo di un vecchio numero della rivista Archimede si mostra[10] come calcolare il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una curva, in un punto di coordinate (x_0, y_0), utilizzando l'algoritmo di divisione tra polinomi e imponendo la condizione di annullamento del resto. Illustriamo tale metodo con l'esempio 2.1.1, preso proprio dall'articolo in nota 10:

Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per il punto A(0, 2) e tangente nel punto B(1, 0) alla curva di equazione $y = x^4 + 3x^2 - 5x + 1$.

Sol. I punti A e B appartengono alla parabola, pertanto la sua equazione in generale è: $y = ax^2 - (a + 2)x + 2$. Dal sistema tra le equazioni delle due curve si arriva all'equazione $x^4 - (a - 3)x^2 + (a - 3)x - 1 = 0$, che deve essere divisibile per $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, vista la condizione di tangenza. La divisione:

$$[x^4 - (a-3)x^2 + (a-3)x - 1] : (x-1)^2$$

ha resto $(-a + 7)x + a - 7$, che uguagliato a zero dà $a = 7$.

Il lettore non avrà difficoltà a vedere che tale metodo è applicabile a tutti gli esempi da noi svolti nelle pagine precedenti; osserviamo, però, che non sempre gli studenti hanno buona familiarità con la divisione tra polinomi.

5. Bibliografia

Bergamini M., Trifone A., Barozzi G., 2009, *Corso base blu di matematica*, moduli SLN in volume unico 3, Zanichelli, pp. 179 e segg.

Genchi M., 2010, Risoluzione qualitativa dell'equazione di terzo grado, *Progetto Alice*, I vol. XI, n. 31, pp. 131 – 152.

Greco Caliri M., 1973, Equazione della tangente a una curva, *Archimede*, anno XXV, Settembre – Dicembre, 5 – 6, anno LXX di *Il Bollettino di matematica*, pp. 301 – 303.

Masullo F., 2009, Proprietà ottiche e derivate della parabola e dell'ellisse, *Progetto Alice*, II vol. X, pp. 303 – 310.

Alessandro Foschi

[10] Greco Caliri M., 1973, Equazione della tangente a una curva, *Archimede*, anno XXV, Settembre – Dicembre, 5 – 6, anno LXX di *Il Bollettino di matematica*, pp. 301 – 303.